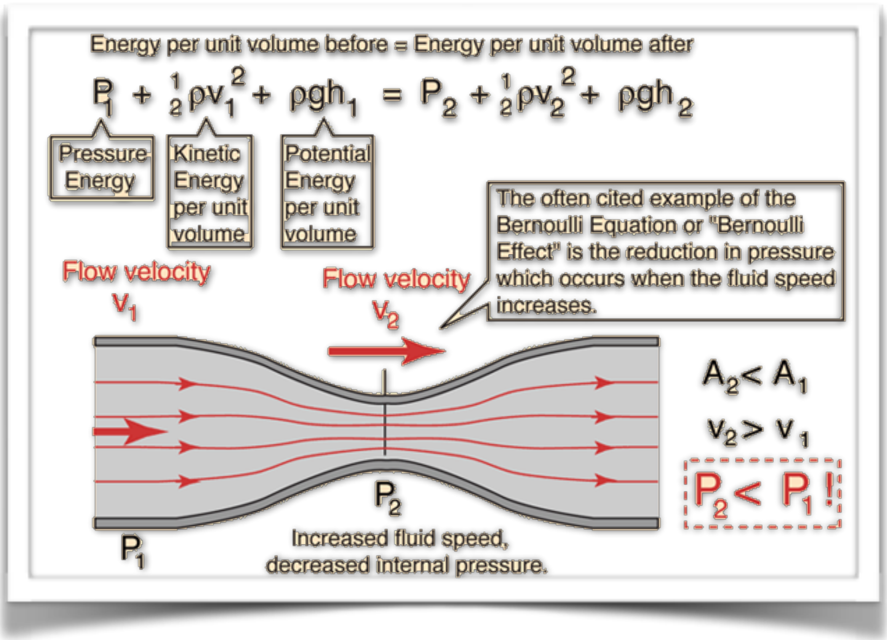
IWEB
Práctica 2 - Riego Automático

Versión: 19 Septiembre 2017

Ecuaciones de Deposito

La ecuación de Bernoulli dice que en cualquier punto debe cumplirse que la suma de la energía de la presión, la energía potencial por unidad de volumen y la energía cinética por unidad de volumen debe se constante:



$$P + \rho\, g\, h + \frac{1}{2}\rho\, v^2 = cte$$

donde ρ es la densidad del líquido, g es la gravedad, y v es la velocidad.

Igualando en el punto 1 (la superficie del deposito) y en el punto 2 (agujero de salida del deposito) tenemos que:

$$P_1 + \rho\, g\, h_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \rho\, g\, h_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

donde v_1 es la velocidad de descenso del nivel de líquido del deposito, v_2 es la velocidad de salida de líquido por el agujero inferior, h_1 es la altura del nivel de líquido en el deposito, h_2 es la altura a la que se encuentra el agujero de salida del deposito.

Si consideramos que la presión atmosférica es igual en 1 y 2, entonces $P_1 = P_2$.

Si situamos el origen del eje de coordenadas vertical a la altura del punto 2, tenemos que $h_2 = 0$.

Con lo que simplificando, la ecuación anterior queda así:

$$g\, h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{1}{2}v_2^2$$

Despejando, obtenemos la velocidad de descenso del nivel del agua (v_1), y la velocidad de salida del agua (v_2) en función de la altura del agua (h) en el deposito son:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\, g\, h}{\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\, g\, h}{1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}}}$$

Ya sabemos como varian las velocidades anteriores en función del nivel de líquido en el deposito.

Como la velocidad de descenso del nivel del agua es $v_1 = \frac{-dh}{dt}$, sustituimos en la fórmula anterior de v_1 y obtenemos que $\frac{-dh}{dt} = \sqrt{\frac{2\, g\, h}{\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1}}$

Despejando: $\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\sqrt{\frac{2\, g}{\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1}}\; dt$

Integrando entre t igual a 0 y t se obtiene $\int_0^t \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\int_0^t \sqrt{\frac{2\, g}{\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1}}\; dt$

Resolviendo la integral se obtiene $h = H_0 - \sqrt{\dfrac{2\,g\,H_0}{\frac{A_1^2}{A_2^2}-1}}\;t + \dfrac{\frac{1}{2}\,g}{\frac{A_1^2}{A_2^2}-1}\;t^2$

Que nos proporciona el nivel de líquido del deposito en función del tiempo, siendo H_0 el nivel de líquido en el instante inicial.

El tiempo que tarda en vaciarse se calcula haciendo h igual a 0 y resolviendo la ecuación anterior.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$$t_v = \frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4\,c_2\,c_0}}{2\,c_2}$$

donde c_0, c_1 y c_2 son los coeficientes del polinomio:

$$c_0 = H_0$$

$$c_1 = -\sqrt{\frac{2\,g\,H_0}{\frac{A_1^2}{A_2^2}-1}}$$

$$c_2 = \frac{\frac{1}{2}\,g}{\frac{A_1^2}{A_2^2}-1}$$

Operando se obtiene que el tiempo en vaciarse es:

$$t_v = \sqrt{\frac{2\,H_0\,(\frac{A_1^2}{A_2^2}-1)}{g}}$$

Luego ya sabemos como varía el nivel de líquido del deposito en función del tiempo.

Ecuaciones De La Trayectoria Parabólica

La tubería por donde sale el agua la hemos situado en (0,0) para el desarrollo de estas ecuaciones.

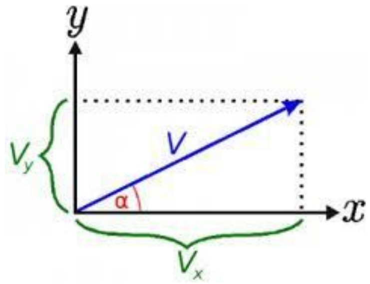
La velocidad inicial y ángulo inicial de salida del agua son v y α.

La distancia y altura a la que se encuentra el objetivo lo llamaremos x_f e y_f.

Las componentes de velocidad inicial en x e y son:

$$v_x = v\ \cos\alpha$$

$$v_y = v\ \sin\alpha$$



El tiempo que tarda el agua en alcanzar el objetivo lo llamaremos t_f. Calculamos t_f:

$$t_f = \frac{x_f}{v_x} = \frac{x_f}{v\, cos\alpha}$$

Aplicando la fórmula $s = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\ a\, t^2$ en el eje y, obtenemos:

$$y_f = 0 + v_y\, t_f - \frac{1}{2}\ g\ t_f^2$$

$$y_f = v\, sin\alpha\ \frac{x_f}{v\, cos\alpha} - \frac{1}{2}\ g\ \frac{x_f^2}{v^2\, cos^2\alpha}$$

$$y_f = \tan\alpha\ x_f - \frac{1}{2}\ g\ \frac{x_f^2}{v^2}\ (1 + \tan^2\alpha)$$

$$\frac{1}{2}\ g\ \frac{x_f^2}{v^2}\ \tan^2\alpha - x_f\ \tan\alpha + \frac{1}{2}\ g\ \frac{x_f^2}{v^2} + y_f = 0$$

$$x_f^2\ \tan^2\alpha - 2\ \frac{x_f\, v^2}{g}\ \tan\alpha + x_f^2 + 2\ \frac{y_f * v^2}{g} = 0$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2\ \frac{x_f\, v^2}{g} \pm \sqrt{4\ \frac{x_f^2\, v^4}{g^2} - 4\, x_f^2\, (x_f^2 + 2\ \frac{y_f * v^2}{g})}}{2\, x_f^2}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2\, x_f^2 - 2\, g\ y_f\, v^2}}{g\, x_f}\right)$$

Estos son los dos posibles ángulos que hay que ajustar para que el agua que sale de la tubería a la velocidad v alcance el objetivo (la planta a regar).

Por último, la trayectoria que sigue una gota de agua que sale de la tubería con velocidad inicial v y ángulo inicial α es:

$$x = v_x\, t$$

$$y = v_y\, t - \frac{1}{2}\ g\ t^2$$